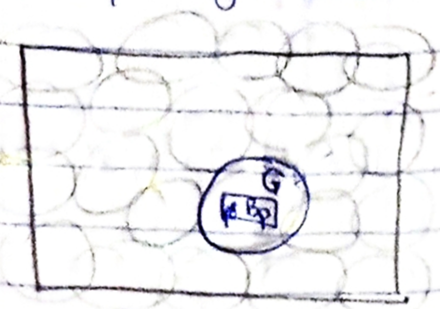
ΘΕΩΡΗΜΑ (Lindelöf)

Έστω $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος $2^{ης}$ αριθμησιμότητας. Αν $S \subseteq E$, τότε για κάθε ανοιχτή κάλυψη του S, $\exists$ το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψη της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στο βιβλίο)

Έστω ότι είναι υπεραριθμήσιμη. Πως θα επιλέξω ποια σύνολα

Θα πάρω για να είναι αριθμήσιμη;



> Έχουμε ένα σημείο, ένα ανοιχτό σύνολο U. Το κάνουμε και μια αριθμήσιμη βάση. Το κάνουμε αυτό και για άλλα σημεία και αρχίζω και τα μαζεύω όλα τα ρ και B_ρ. Αφού έχουμε αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας

Τα παραπάνω είναι αριθμήσιμα.
Άρα B_ν αριθμήσιμη το πλήθος και έχω πάρει τα ρ κ' B_ρ μέσα στα σύνολα της συλλογής.
Επομένως είναι και υποσυλλογή από αυτή που μας έδωσαν και καλύπτει το χώρο, άρα είναι και αριθμήσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.25
Έστω (E, τ) ένας τοπολογικός χώρος $2^{ης}$ αριθμησιμότητας. Τότε $\forall$ βάση $\mathcal{B}$ της τ $\exists$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}^*$ της τ, με $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (στο βιβλίο)

* Η κάλυψη δεν είναι βάση! (Είναι διαφορετική η πρόταση, λοιπόν, από το θεώρημα)

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.28
Ας είναι (E_1, τ_1), (E_2, τ_2) δυο τοπολογικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια ανοιχτή και συνεχής συνάρτηση. Αν $E_1 \in C_1$ (αντίστοιχα $E_1 \in C_2$), τότε $E_2 \in C_1$ (αντίστοιχα $E_2 \in C_2$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (στο βιβλίο)

Συμβολισμός: C_1: $1^{ης}$ αριθμησιμότητας
C_2: $2^{ης}$ αριθμησιμότητας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η 1^{η} κ' η 2^{η} αριθμησιμότητα σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση είναι τοπολογικές ιδιότητες.